Graphes Eulériens et Hamiltoniens

Nadia Brauner

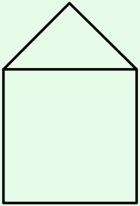
Nadia.Brauner@imag.fr

Plan

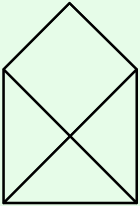
Plan

Chemin eulérien

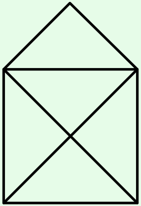
Quels dessins peuvent être dessinés sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ?



(a)



(b)



(c)

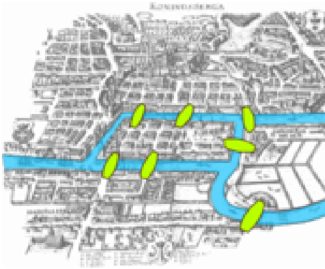
Chemin eulérien

Les ponts de Königsberg

Problème fondateur de la théorie des graphes, Euler, 1736

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles reliées entre elles par un pont et six ponts relient le continent à l'une ou l'autre des deux îles.

Existe-t-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts ?



Euler, 1707-1783

Il a même sa tête sur les billets de banque Suisses.

Chemin eulérien

Un **cycle eulérien** de $G = (V, E)$ est un cycle qui emprunte chaque arête de G une et une seule fois.

Remarque : le cycle peut ne pas être élémentaire, c'est-à-dire passer plusieurs fois par le même sommet.

Intérêt : tournée postale, ramassage des ordures, reconstitution de séquences d'ADN, alignement de transistors...

Chemin eulérien

Un graphe G est **eulérien** si et seulement si il existe un cycle eulérien dans G.

Theorem (Euler 1736)

G est eulérien si et seulement si

- *G est connexe et*
- *$d(v)$ est pair $\forall v \in V$.*

Chemin eulérien

"$\Rightarrow$" :

- G eulérien $\Rightarrow$ G connexe OK
- soit $v \in V$ un sommet qui apparait k fois dans le cycle eulérien C. Donc C contient k arêtes de la forme (x, v) (le cycle rentre k fois dans v) et k arêtes de la forme (v, x) (le cycle sort k fois de v). Comme C est simple (pas d'arêtes en double), $d(v) = 2k$ est pair.

Chemin eulérien

"$\Leftarrow$" : par l'absurde, supposons qu'il existe des graphes connexes dont tous les degrés sont pairs qui n'admettent pas de cycle eulérien.

- Soit G un tel graphe
- Soit C une plus grande chaîne simple (pas de répétition d'arête) de G (en nombre d'arêtes).

Chemin eulérien

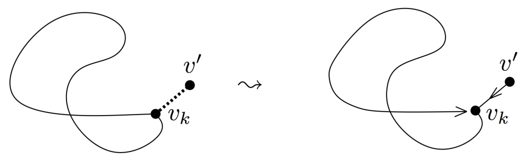
Cas 1 C n'est pas un cycle.

C est une chaîne. Les extrémités d'une chaîne ont un degré impair dans la chaîne. Comme le degré du sommet d'arrivée est pair, on a une arête qui en sort. On peut donc rajouter cette arête et ainsi rallonger la chaîne. contradiction avec la maximalité de C ✘.

Chemin eulérien

Cas 2 $C = (v_0, v_1 ... v_p, v_0)$ est un cycle. Il n'est pas eulérien par hypothèse.

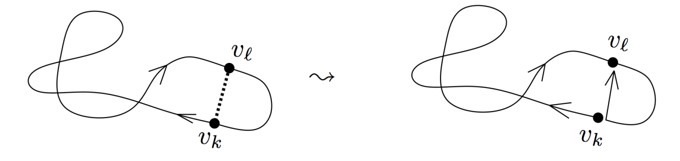
- **Cas 2.1** Il existe un sommet qui n'est pas dans C
  Comme le graphe est connexe, il existe une arête $v_k v'$ avec $v' \notin C$. La chaîne $(v', v_k, v_{k+1} ... v_p, v_0 ... v_{k-1}, v_k)$ contredit la maximalité de C.



Dessins de *Invitation to mathematics* de Matoušek et Nešetřil

Chemin eulérien

- **Cas 2.2** Tous les sommets sont dans C
  Il existe une arête $v_l v_k$ qui n'est pas dans C. La chaîne $(v_k, v_{k-1} \ldots v_0, v_m \ldots v_{k+1}, v_k, v_l)$ contredit la maximalité de C.



Dessins de *Invitation to mathematics* de Matoušek et Nešetřil

Chemin eulérien

Et si le graphe n'est pas eulérien

- Dans quel cas a-t-on une chaîne eulérienne ?
- Minimiser le nombre de chaînes pour parcourir toutes les arêtes (facile ?)
- Si le graphe est connexe autoriser à passer plusieurs fois par certaines arêtes. Minimiser la distance inutile parcourue (postier chinois, on en reparle plus tard)

Plan

Cycle Hamiltonien

Un **cycle hamiltonien** de $G = (V, E)$ est un cycle qui emprunte chaque sommet de G une et une seule fois.

Intérêt : Tâches à ordonnancer avec set-up, voyageur de commerce

Cycle Hamiltonien

Un graphe est **hamiltonien** si et seulement si il contient un cycle hamiltonien.

Commentaires : Graphes Eulérien et Hamiltonien sont chacun d'un coté de la frontière entre les classes P et NP-complet. Autant de bonnes caractérisations existent pour reconnaitre un graphe eulérien, autant le problème de graphe hamiltonien est difficile.

La généralisation de ce problème où on cherche un cycle hamiltonien de poids minimum dans un graphe pondéré a généré une très vaste littérature (=TSP). Mais nous y reviendrons plus tard...

Proposez un graphe simple d'ordre 5 pour chaque cas suivant :

1. G1 est hamiltonien et eulérien ;
2. G2 est hamiltonien et non eulérien ;
3. G3 est non hamiltonien et eulérien ;
4. G4 est non hamiltonien et non eulérien ;

Combien de fois devez vous lever le stylo au minimum pour reproduire ces formes inspirées de Kandinsky sans passer deux fois sur le même trait ?