GRAPHES : CHAÎNES ET CONNEXITÉ

N. Brauner *Université Grenoble Alpes*

1 Chemins et cycles

Exercice 1 : Montrer qu'un graphe simple de degré minimum au moins k contient une chaîne élémentaire de longueur k.

Exercice 2 : Soit G un graphe simple dont exactement deux sommets x et y sont de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans G de x à y.

Exercice 3 : Soit G un graphe simple à n sommets et m arêtes. Montrer que si $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, alors G est connexe.

Exercice 4 : Soit G un graphe non orienté. Montrer qu'un moins un des deux graphes, G ou son complémentaire, est connexe.

Exercice 5 : Soit G un graphe simple à n sommets tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$. Montrer que G est connexe.

GRAPHES : GRAPHES EULÉRIENS

N. Brauner *Université Grenoble Alpes*

Exercice 6 : **Sans lever le crayon**

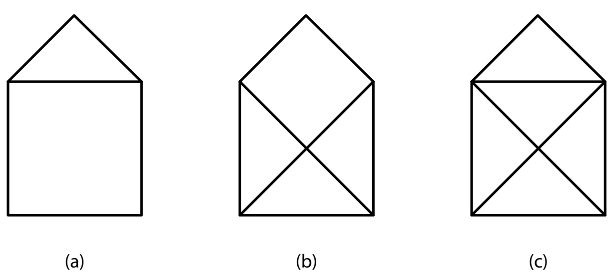


FIGURE 1 –

Question 1 – Quels dessins dans la Figure 1 peuvent être dessinés sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ?

Exercice 7 : Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?

Exercice 8 :

Question 1 – Soit G un graphe connexe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant des arêtes ?

Question 2 – Combien d'arêtes au minimum doit-on rajouter à G pour le rendre Eulérien.

Exercice 9 : **Les dominos**

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

Question 1 – En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?

Question 2 – Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).

Question 3 – Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?

Question 4 – Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Exercice 10 : **Carcasse de cube**

On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

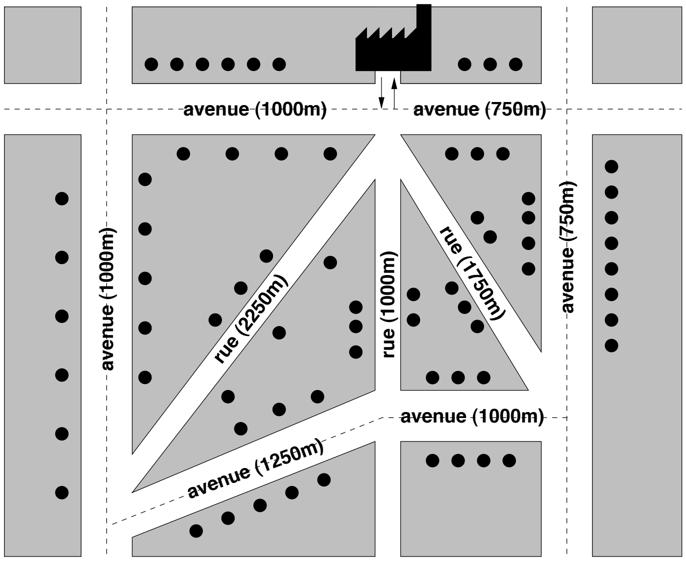
Exercice 11 : **Jeu de cartes** (Matej Stehlik)

Dans un jeu de $52 = 13 \times 4$ cartes, chaque carte a une valeur $(A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R)$ et une couleur $(\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit)$

Question 1 – Quelle est la longueur maximale d'une suite de cartes qu'on peut construire à partir d'un jeu de 52 cartes de façon à ce que deux cartes consécutives soient de la même valeur ou de la même couleur, mais si on prend trois cartes consécutives quelconques, elles n'ont pas toutes trois la même valeur ni la même couleur ? Par exemple, $A\spadesuit, 7\spadesuit, 7\heartsuit, D\heartsuit$ est une suite qui respecte cette règle.

Exercice 12 : **Ramassage des poubelles**

Voici le plan simplifié d'un quartier de Propreville. Une benne venant de l'usine d'incinération doit vider les 70 conteneurs indiqués sur le croquis et revenir à l'usine.

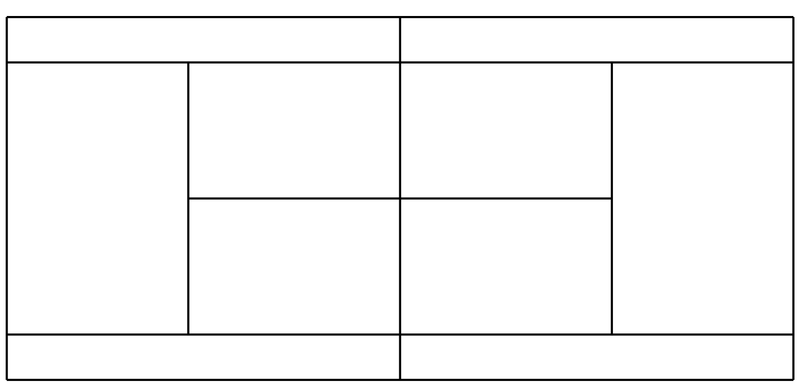


La circulation sur les avenues et sur les rues est dans les deux sens. La vitesse du camion-benne à vide (ou entre deux ramassages) est de 30km/h et il est le même dans les deux sens. Il faut compter 30 secondes pour vider un conteneur. Chaque avenue a deux voies et il faut réaliser le ramassage indépendamment de chaque coté, ce qui nécessite deux passages de la benne (un dans chaque sens). Le ramassage sur les trois rues se fait des deux cotés en même temps.

Question 1 – Trouver le trajet optimal qui minimise le temps total du parcours nécessaire pour ramasser toutes les ordures.

Exercice 13 : **Peinture sur court**

Vous possédez, dans votre jardin, un court de tennis et vous venez d'acheter une machine pour peindre les lignes du court. Chaque ligne ne peut être peinte qu'une seule fois et vous ne souhaitez pas déplacer trop souvent la machine sans peindre afin d'éviter les taches de peinture dans votre magnifique pelouse.



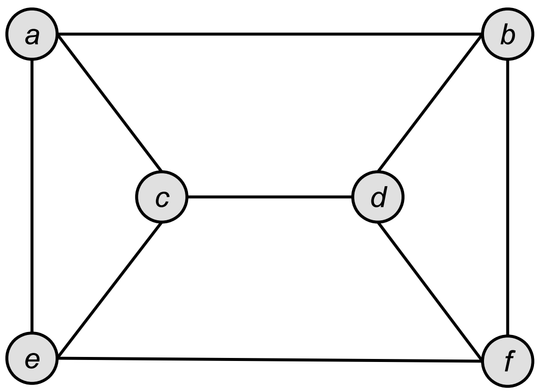
Question 1 – Où commencez-vous à peindre et quel trajet choisissez-vous pour la machine ?

Exercice 14 : **Le digicode**

Un digicode possède 10 touches numérotées de 0 à 9. Le code fait 4 chiffres. On cherche à deviner le code en tapant le minimum de touches. On tire parti du fait que le digicode ouvre la porte dès que les 4 chiffres sont tapés. Quelle est la longueur minimale d'une suite de 0 et 9 telle que tout code possible de 4 chiffres apparait comme sous-suite de 4 éléments consécutifs ?

Exercice 15 : **Vocabulaire** (Bernard Penz)

Soit le graphe $G = (V, E)$ donné dans la figure suivante :



Question 1 – Donnez les co-cycles définis par les ensembles de sommets suivants et donnez pour chacun sa cardinalité :
- $W_1 = \{a, c, e\}$
- $W_2 = \{a, d, f\}$

Question 2 – Montrez qu'il n'existe pas de co-cycle de cardinalité supérieure à celle du co-cycle $[W_2, V - W_2]$ (difficile, il faut utiliser les symétries du graphe).

Question 3 – Pour le graphe $G = (V, E)$, indiquez quelle est la longueur maximale d'une chaine élémentaire. Expliquez pourquoi.

Question 4 – Donnez toutes les chaines élémentaires de longueur maximale partant du sommet a et commençant par l'arête ab.

Question 5 – Déduisez de la question précédente tous les cycles hamiltoniens du graphe $G = (V, E)$ contenant l'arête ab.

Question 6 – Expliquez pourquoi le graphe G n'admet pas de cycle eulérien, ni de chaine eulérienne.

Question 7 – Combien d'arêtes au minimum devez-vous ajouter au graphe G pour qu'il admette un cycle eulérien ?

Question 8 – Déterminez tous les ensembles possibles d'arêtes à ajouter de façon à ce que le nouveau graphe soit simple et eulérien, et prouvez qu'il n'y en a pas d'autres.

Question 9 – Dessinez les graphes partiels des arêtes ajoutées. Comment appelle-t-on ce type de graphe ?

Prenons maintenant le graphe G auquel nous ajoutons les arêtes ad, be et cf.

Question 10 – Donnez une liste de cycles élémentaires, qui combinés permettent d'obtenir un cycle eulérien.